Université Moulay Ismail
Faculté des Sciences et Techniques
Errachidia
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2015/2016
Filière MIP
Module 511

Mesure et Intégration

Série N°1

Exercice 1 *Soient E un ensemble dénombrable et $f : E \longrightarrow F$ une surjection.*

1-Pour tout $y \in F$, montrer que $f^{-1}\{y\}$ est non vide.

2-Définissons une fonction $g : F \longrightarrow E$ en prenant, pour chaque $y \in F$ un élément $g(y) \in f^{-1}\{y\}$.

Vérifier que $f \circ g = id_F$ et en déduire que, g est injective et que F est dénombrable.

Exercice 2 *Soient E un ensemble et $\{A_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ une famille de sous-ensembles dénombrables de E tels que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on fixe une injection $f_n : A_n \longrightarrow \mathbb{N}$ et on pose $B_n = A_n \setminus (A_0 \cup A_1 ... \cup A_{n-1})$ si $n > 0$ et $A_0 = B_0$.*

1) Montrer qu'on a :

- i) $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $(n \neq m \Longleftrightarrow B_m \cap B_n = \emptyset)$.

- ii) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

2) Montrer que si pour tout $x \in B_n$ on pose $f(x) = (n, f_n(x))$ on obtient ainsi une application $f : E \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ qui est bien définie.

3) Montrer que l'application f est injective. En déduire que E est dénombrable.

Exercice 3 *Soient $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ deux suites de $\overline{\mathbb{R}}$.*

1) Montrer que l'on a :

$$\underline{\lim}(a_n) + \underline{\lim}(b_n) \leq \underline{\lim}(a_n + b_n) \leq \underline{\lim}(a_n) + \overline{\lim}(b_n) \leq \overline{\lim}(a_n + b_n) \leq \overline{\lim}(a_n) + \overline{\lim}(b_n)$$

(Toutes les sommes sont supposées définies).

2) Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de parties d'un ensemble E.

a) Déterminer $\overline{\lim}(A_n)_{n\geq 1})$ et $\underline{\lim}(A_n)$ dans les cas suivants :

i) $(A_n)_{n\geq 1}$ est monotone.

ii) Les $(A_n)_{n\geq 1}$ sont disjoints deux à deux.

b) Montrer que $\chi_{\overline{\lim}(A_n)} = \overline{\lim}\chi_{A_n}$ et $\chi_{\underline{\lim}(A_n)} = \underline{\lim}\chi_{A_n}$.

Exercice 4 *On appelle un clan sur un ensemble X toute famille $\mathcal{T}$ de parties de X stable pour la réunion finie et la différence.*

a) Vérifier que toute algèbre est un clan.

b)Montrer que :

$\mathcal{T}$ est une algèbre $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{T}$ est un clan et $X \in \mathcal{T}$.

c) Donner un exemple d'un clan qui n'est pas une algèbre.

Exercice 5 *Que peut-on dire de l'image directe d'une algèbre (resp σ-algèbre) par une application ?*

Exercice 6 *Soit E un ensemble.*

Déterminer la σ algèbre engendrée par les singletons de E.

Indication on distingue les cas où E est dénombrable ou E est non dénombrable.

Exercice 7 *Soit E un ensemble.*

1-Soit $\Omega = \{A_0, A_1, A_2, ..., A_n, ...\}$ une partition de E.

Déterminer L'algèbre $\mathcal{A}(\Omega)$ engendrée par Ω.

Indication Si $\Omega = \{A_0, A_1, A_2, ..., A_n\}$ considérer $\mathcal{A} = \{(\cup A_k)_{k\in J}$ où $J \subset \{1, 2, ..., n\}\}$.

Si $\Omega = \{A_0, A_1, A_2, ..., A_n, ...\}$ considérer $\mathcal{A} = \{(\cup A_k)_{k\in J} \mid J$ fini ou J^C fini $J \subset \mathbb{N}\}$.

Applications

i)$E = \mathbb{N}$ et $A_n = \{n\}$ pour tout $n \geq 0$.

ii)$E = \mathbb{N}$ et $A_1 = \{0, 1\}$ et $A_n = \{n\}$ pour tout $n \geq 2$.

Série 1

Exercice 1 :

E un ensemble dénombrable

$f : E \longrightarrow F$ une surjection

E est dénombrable si E ont en une bijection avec une partie A de $\mathbb{N}$

ça équivalent à l'existance d'une injection de E dans $\mathbb{N}$

1) pour tout $y \in F$, montrons que $f^{-1}\{y\}$ est non vide

$$f^{-1}(\{y\}) = \{x \in E \,/\, f(x) \in \{y\}\}$$
$$= \{x \in E \,/\, f(x) = y\}$$

$\forall y \in F, \exists x \in E$ tq $f(x) = y$ car f ont surjective

donc $f^{-1}\{y\} \neq \emptyset \quad \forall y \in F$

2) definissions une fct $g : F \longrightarrow E$ en prenant, pour chaque $y \in F$ un élement $g(y) \in f^{-1}\{y\}$

- vérifier que $f \circ g = id_F$

pour $y \in F$ on a. $f \circ g(y) = f(g(y)) = y$

$\Rightarrow f \circ g = id_F$

$$F \xrightarrow{g} E \xrightarrow{f} F$$
$$\underbrace{\qquad\qquad}_{f \circ g}$$

$$F \xrightarrow{f \circ g} F \qquad f \circ g(y) = y \Rightarrow f \circ g = id_F$$

- En déduire que g est injective ?

soient $y, y' \in F$ tq $g(y) = g(y')$

$\Leftrightarrow f(g(y)) = f(g(y'))$

$\Leftrightarrow (f \circ g)(y) = (f \circ g)(y') \Leftrightarrow Id_F(y) = Id_F(y')$

$\Leftrightarrow y = y' \Rightarrow g$ est injective

- En déduire que F est dénombrable ?

E est dénombrable ça est équivalent à l'existence d'une injection i de E dans $\mathbb{N}$

on a $F \xrightarrow{g} E \xrightarrow{i} \mathbb{N}$

on a $i \circ g$ est une injection de F dans $\mathbb{N}$

d'où F est dénombrable.

Exercice 2 :

E un ensemble et $\{A_n / n \in \mathbb{N}\}$ une famille de sous-ensemble dénombrable de E tq $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, on fixe une injection $B_n : A_n \longrightarrow \mathbb{N}$

on pose $B_0 = A_0$ et $B_n = A_n \setminus (A_0 \cup A_1 \dots \cup A_{n-1})$ si $n > 0$

1) Montrer qu'on a :

i) $\forall n, m \in \mathbb{N}, (n \neq m \Leftrightarrow B_m \cap B_n = \emptyset)$. ?

on suppose que $n > m$

on a $B_n = A_n \setminus (A_0 \cup A_1 \dots \cup A_m \cup \dots \cup A_{n-1})$

donc $B_n \cap B_m \subseteq (A_n \setminus (A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_m \cup \dots \cup A_{n-1})) \cap A_m$

$\Rightarrow B_n \cap B_m = \emptyset$ (car $(A_n \setminus (\dots)) \cap A_m = \emptyset$)

ii) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$?

on a : $\forall n \in \mathbb{N} : B_n \subseteq A_n$

$\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

est ce que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$?

soit $x \in \bigcup A_n \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ tq $x \in A_n$

$\Rightarrow x \in \bigcup_{i=0}^{n} A_i = \bigcup_{i=0}^{n} B_i$

or $\bigcup_{i=0}^{n} B_i \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \Rightarrow x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$

d'où $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$

② montrons que si pour tout $x \in B_n$, on pose $f(x) = (n, f_n(x))$ on obtient une application $f : E \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ qui est bien définie :

soit $x \in E$

on a : $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ or $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$

$\Rightarrow x \in E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$

$\Rightarrow \exists ! \ n \in \mathbb{N}$ tq $x \in B_n$

or f_n est définie sur A_n et $B_n \subseteq A_n$

donc $f(x) = (n, f_n(x))$ existe et unique.

donc l'application $f : E \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$x \longmapsto (n, f_n(x))$

est bien définie

③. montrons que f est injective ?

soient $x, y \in E$ tq $f(x) = f(y)$

$\Rightarrow (n, f_n(x)) = (m, f_m(y))$

$\Rightarrow n = m$ et $f_n(x) = f_m(y) \Rightarrow f_n(x) = f_n(y)$

$\Rightarrow x = y \Rightarrow$ donc f est injective.

• En déduire que E est dénombrable ?

$\mathbb{N}^2$ est équipotente à une bijection

$$A : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$$

on a $E \xrightarrow{B} \mathbb{N}^2 \xrightarrow{A} \mathbb{N}$

$A \circ B$ est une injection de E dans $\mathbb{N}$

d'où E est dénombrable.

Exercice3:

* On suppose que les sommes sont toujours définies :

soient $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ et $(\beta_n)_{n \geq 1}$ deux suites croissantes de $\mathbb{R}$, $\alpha_n = -\infty$

$\alpha_n + \beta_n = -\infty + \beta_n = -\infty$

on a : $\lim(\alpha_n + \beta_n) = \lim(\alpha_n) + \lim(\beta_n)$

si $\lim(\alpha_n)$ est finie et $\lim(\beta_n)$ est finie

on a $\lim(\alpha_n + \beta_n) = \lim(\alpha_n) + \lim(\beta_n)$

$\lim(\alpha_n)$ n'est pas fini

si la suite α_n n'est pas stationnaire

on a : $\lim \alpha_n = +\infty$

on a : $\alpha_n = \alpha_n + \beta_n - \beta_n$ $\qquad \beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots$

$\leq \alpha_n + \beta_n - \beta_0$ $\qquad \beta_n > \beta_0$

$\lim(\alpha_n + \beta_n) = +\infty$

$\lim(\alpha_n + \beta_n) = \lim(\alpha_n) + \lim(\beta_n)$

1) * Montrons que : $\underline{\lim}(a_n) + \underline{\lim}(b_n) \leqslant \underline{\lim}(a_n + b_n)$

on a : $\underline{\lim}(a_n) = \sup(\inf(a_n)) = \lim_{n \to +\infty} v_n$

(avec $v_n = \inf(a_n)$ est croissante $v_n \leqslant v_{n+1}$)

on a : $\{a_n, n \geqslant k+1\} \subset \{a_n, n \geqslant k\}$

donc : $\inf(\{a_n, n \geqslant k\}) \leqslant \inf(\{a_n, n \geqslant k+1\})$

$v_n \leqslant v_{n+1}$

on a : $\inf_{k \geqslant n}(a_k) \leqslant a_k \quad \forall k \geqslant n$

$\inf_{k \geqslant n}(b_k) \leqslant b_k \quad \forall k \geqslant n$

$\Rightarrow \inf_{k \geqslant n}(a_k) + \inf_{k \geqslant n}(b_k) \leqslant a_k + b_k \quad \forall k \geqslant n$

$\Rightarrow \inf_{k \geqslant n}(a_k) + \inf_{k \geqslant n}(b_k) \leqslant \inf_{k \geqslant n}(a_k + b_k)$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \left(\inf_{k \geqslant n}(a_k) + \inf_{k \geqslant n}(b_k) \right) \leqslant \lim_{n \to +\infty} \left(\inf_{k \geqslant n}(a_k + b_k) \right)$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \left(\inf_{k \geqslant n}(a_k) \right) + \lim_{n \to +\infty} \left(\inf_{k \geqslant n}(b_k) \right) \leqslant \lim_{n \to +\infty} \left(\inf_{k \geqslant n}(a_k + b_k) \right)$

d'où $\underline{\lim}(a_n) + \underline{\lim}(b_n) \leqslant \underline{\lim}(a_n + b_n)$

* montrons que : $\underline{\lim}(a_n + b_n) \leqslant \underline{\lim}(a_n) + \overline{\lim}(b_n)$

on a : $\underline{\lim}(a_n + b_n) - \overline{\lim}(b_n) = \underline{\lim}(a_n + b_n) + \underline{\lim}(-b_n)$

$\leqslant \underline{\lim}(a_n + b_n - b_n) \leqslant \underline{\lim}(a_n)$

d'après la 1ère égalité

donc : $\underline{\lim}(a_n+b_n) - \overline{\lim}(b_n) \leq \underline{\lim}(a_n)$

$\Rightarrow$ $\overline{\lim}(a_n+b_n) \leq \underline{\lim}(a_n) + \overline{\lim}(b_n)$

* Montrons que : $\underline{\lim}(a_n) + \overline{\lim}(b_n) \leq \overline{\lim}(a_n+b_n)$

on a : $\underline{\lim}(a_n) = \underline{\lim}(a_n+b_n-b_n)$

$\leq \underline{\lim}(a_n+b_n) + \underline{\lim}(-b_n)$

$\Rightarrow$ $\underline{\lim}(a_n) - \underline{\lim}(-b_n) \leq \underline{\lim}(a_n+b_n)$

$\Rightarrow$ $\underline{\lim}(a_n) + \overline{\lim}(b_n) \leq \overline{\lim}(a_n+b_n)$

* Montrons que : $\overline{\lim}(a_n+b_n) \leq \overline{\lim}(a_n) + \overline{\lim}(b_n)$

on a : $\overline{\lim}(a_n) + \overline{\lim}(b_n) = -\underline{\lim}(-a_n) - \underline{\lim}(-b_n)$

$\geq -\underline{\lim}(-a_n-b_n)$

$\geq \overline{\lim}(a_n+b_n)$

$\Rightarrow$ $\overline{\lim}(a_n+b_n) \leq \overline{\lim}(a_n) + \overline{\lim}(b_n)$

(2) soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de parties d'un ensemble E :

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $A_n \subseteq E$

déterminer $\overline{\lim}(A_n)$ et $\underline{\lim}(A_n)$ dans les cas suivantes :

on a : $\overline{\lim}(A_n) = \bigcap_n \left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)$ et $\underline{\lim}(A_n) = \bigcup_n \left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right)$

$x \in \overline{\lim}(A_n) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists k \geq n$ tq $x \in A_k$

$x \in \underline{\lim}(A_n) \Leftrightarrow \exists n'$ tq $\forall k \geq n'$ on a $x \in A_k$

on a $\underline{\lim}(A_n) \subseteq \overline{\lim}(A_n)$??

soit $x \in \underline{\lim}(A_n) \Leftrightarrow \exists n'$ tq $\forall k \geq n'$ on a : $x \in A_k$

soit $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq n'$: $\forall k \geq n$, on a : $k \geq n'$ on a $x \in A_k$.
si $n' \geq n$ on a $\forall k \geq n' \geq n$ on a $x \in A_n$

$\Rightarrow x \in \overline{\lim}(A_n)$

i) • si (A_n) est croissante : $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$

on a : $\underline{\lim}(A_n) = \bigcup_n \left(\bigcap_{k \geq n} A_k \right) = \bigcup_n (A_n)$

on a : $\overline{\lim}(A_n) = \bigcap_n \left(\bigcup_{k \geq n} A_k \right) = \cap (B_n)$ où $B_n = \bigcup_{k \geq n} A_n$

$\subseteq B_n$

$\Rightarrow \overline{\lim}(A_n) \subseteq B_n = \bigcup_{k \geq n} A_k$

on : $\underline{\lim}(A_n) = \bigcup_{k \geq 1} A_k \subseteq \overline{\lim}(A_n) \subseteq \bigcup_{n \geq 1} A_n$

donc : $\underline{\lim}(A_n) = \overline{\lim}(A_n) = \bigcup A_n$

• si (A_n) est décroissante : $A_n \supset A_{n+1} \supset A_{n+2} \supset \dots$

on a : $\overline{\lim}(A_n) = \bigcap_{n \geq 1} \left(\bigcup_{k \geq n} A_k \right) = \bigcap_{n \geq 1} (A_n)$

on a : $\underline{\lim} A_n = \bigcup_{n \geq 1} \underbrace{\left(\bigcap_{k \geq n} A_k \right)}_{B_n} = \bigcup_{n \geq 1} (B_n) \supseteq B_n \quad \forall n$

en particulier on a :

$$B_1 = \bigcap_{k \geq 1} A_k \subseteq \underline{\lim} A_n$$

$$\Rightarrow \bigcap_{k \geq 1} A_k \subseteq \underline{\lim} A_n \subset \overline{\lim}(A_n) = \bigcap_{n \geq 1} A_n$$

$$\Rightarrow \underline{\lim} A_n = \overline{\lim}(A_n) = \bigcap_{n \geq 1} A_n$$

$A_n = [a, b)$ si n est paire
$A_n = [b, c]$ si n est impaire , calculer $\underline{\lim} A_n$, $\overline{\lim} A_n$?

(ii) Les $(A_n)_{n\geq 1}$ sont disjoints deux à deux :

$$\underline{\lim} A_n = \bigcup_{n\geq 1}\left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right) = \bigcup_{n\geq 1}(\emptyset) = \emptyset$$

soit $x \in \overline{\lim} A_n \iff \forall n, \exists k \geq n$ tq $x \in A_k$

pour $n' = k+1$ on a :

$$\exists k' \geq n' = k+1 > k \text{ tq } x \in A_{k'}$$

on a : $x \in A_k \cap A_{k'} = \emptyset \quad (k = k')$

ce qui est pas possible $\Rightarrow \overline{\lim} A_n = \emptyset$

$\chi_{A\cup B} = \sup(\chi_A, \chi_B)$, $\chi_{A\cap B} = \inf(\chi_A, \chi_B)$

$\chi_{\cup A_n} = \sup(\chi_{A_n})$, $\chi_{\cap A_n} = \inf(\chi_{A_n})$

Mq $\chi_{\overline{\lim}(A_n)} = \overline{\lim}(\chi_{A_n})$

on a : $\chi_{\overline{\lim}(A_n)} = \chi_{\bigcap_n (\overbrace{\bigcup_{k\geq 1} A_n}^{B_n})} = \chi_{\bigcap_{n\geq 1} B_n} = \inf_{n\geq 1}(\chi_{B_n})$

$= \inf_{n\geq 1}\left(\sup_{k\geq n} \chi_{A_n}\right) = \overline{\lim}(\chi_{A_n})$

$\chi_{\underline{\lim} A_n} = \chi_{\bigcup_{n\geq 1} (\overbrace{\bigcap A_k}^{B_n})} = \chi_{\bigcup_{n\geq 1} B_n} = \sup_{n\geq 1} \chi_{B_n}$

$= \sup\left(\inf_{k\geq n} A_k\right) = \underline{\lim}\, \chi_{A_n}$

Exercice 4 :

$\mathcal{T} \subseteq P(X)$

$\mathcal{T}$ est un clan $\Longleftrightarrow \forall A, B \in \mathcal{T}$ on a : $\begin{cases} A \cup B \in \mathcal{T} \\ \text{et} \\ A \setminus B \in \mathcal{T} \end{cases}$

a) vérifier que toute algèbre est un clan :

soit $\mathcal{A}$ une algèbre ($\mathcal{A} \in P(X)$)

soient $A, B \in \mathcal{A}$, on a : $A \cup B \in \mathcal{A}$ car $\mathcal{A}$ est une algèbre.

on a : $A \setminus B = A \cap B^c = (A^c \cup B)^c$ donc $A \setminus B \subset A$

d'où : $\mathcal{A}$ est un clan

b) Montrons que : $\mathcal{T}$ est une algèbre $\Longleftrightarrow \mathcal{T}$ est un clan et $X \in \mathcal{T}$

$\Longrightarrow$) on a $\mathcal{T}$ est une algèbre et $X \in \mathcal{T}$ car $\mathcal{T}$ est une algèbre

d'après @ toute algèbre est un clan et on a $X \in \mathcal{T}$ (car $\mathcal{T}$ est une algèbre)

$\Longleftarrow$) soit $\mathcal{T}$ un clan et $X \in \mathcal{T}$, est ce que $\mathcal{T}$ est une algèbre ??

soit $A, B \in \mathcal{T}$, on a : $A \cup B \in \mathcal{T}$ car $\mathcal{T}$ est un clan

soit $A \in \mathcal{T}$, est ce que $A^c \in \mathcal{T}$?

on a : $A^c = X \setminus A \Rightarrow A^c \in \mathcal{T}$, donc $\mathcal{T}$ est une algèbre

c) soit $X = \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = P(\mathbb{R} \setminus \{x\}) = \{A \subset \mathbb{R} \setminus x \notin A\}$

si $A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{T}$ (car $x \notin A \cup B$)

si $A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{T}$ (car $x \notin A \setminus B$)

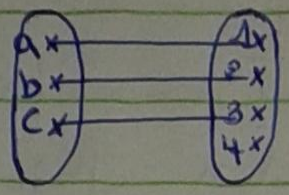
donc : $\mathcal{T}$ est un clan

on a : $\mathbb{R} \notin \mathcal{T}$

$\Rightarrow \mathcal{T}$ n'est pas une algèbre (car $x \in \mathbb{R}$ et $x \notin \mathcal{T}$)

Exercice 5 :

soit $f : X \longrightarrow Y$



$X = \{a, b, c\}$

$Y = \{1, 2, 3, 4\}$

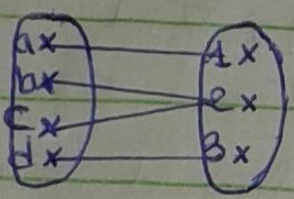
$A = \{a, b\}$

$\mathcal{A} = \{\{a,b\}, \{c\}, X, \emptyset\}$, $\mathcal{A}$ est une algèbre, mais $f(\mathcal{A})$?

$f(\mathcal{A}) = \{\{1,2\}, \{3\}, \{1,2,3,4\}, \emptyset\}$, $f(\mathcal{A})$ n'est pas une algèbre

f est injective, mais non surjective

$X = \{a,b,c,d\}$, $Y = \{1,2,3\}$, $\mathcal{A} = \{\{a,b\}; \{c,d\}, \emptyset, X\}$



on a : $f(\mathcal{A})$ n'est pas une algèbre

f est surjective mais pas injective

- si f est bijective :

soit $\mathcal{A}$ une algèbre sur X. est ce que $f(\mathcal{A})$ est une algèbre sur Y.

on a : $f(\mathcal{A}) = \{f(A) / A \in \mathcal{A}\}$

on a : $f(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ car $\emptyset \in \mathcal{A}$ et $f(\emptyset) = \emptyset \in f(\mathcal{A})$

soient $f(A), f(B) \in f(\mathcal{A})$

$$f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$$

on a : $A \cup B \subset \mathcal{A}$ donc : $f(A) \cup f(B) \subset f(\mathcal{A})$

on a : $f(A) \subset f(\mathcal{A})$, est ce que : $(f(A))^c \in f(\mathcal{A})$?

Montrons que : $(f(A))^c = f(A^c)$

on a $X = A \cup A^c \Rightarrow f(X) = f(A \cup A^c) = Y$ car f est surjective

$\Rightarrow f(A) \cup f(A^c) = Y$

on a : $A \cap A^c = \emptyset \Rightarrow B(A \cap A^c) = B(\emptyset) = \emptyset$

or B est injective $\Rightarrow B(A) \cap B(A^c) = \emptyset$

$\Rightarrow B(A \cap A^c) = B(A) \cap B(A^c) = \emptyset$

injective

$\Rightarrow (B(A))^c = B(A^c)$ donc $(B(A))^c \in B(A)$

ainsi $B(A)$ est une algèbre

Exercice 6 :

soit E un ensemble.

Déterminer la σ algèbre engendré par les singletons de E

soit : $\mathcal{R} = \{\{x\} / x \in E\} \subseteq P(E)$

$B(\mathcal{R})$?? $B(\mathcal{R}) \subseteq P(E)$

- si E est dénombrable : $\forall A \subset E$, on a : A est dénombrable

pour $A \in P(E)$: $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$

on a : $\{x\} \in \mathcal{R}$ et $\mathcal{R} \subseteq B(\mathcal{R})$

$\Rightarrow \{x\} \in B(\mathcal{R}) \Rightarrow \bigcup_{x \in A} \{x\} \in B(\mathcal{R})$ (réunion dénombrable)

$\Rightarrow A \in B(\mathcal{R}) \Rightarrow P(E) \subseteq B(\mathcal{R})$ et $B(\mathcal{R}) \subseteq P(E)$

donc $P(E) = B(\mathcal{R})$

- si E est non dénombrable :

soit $B = \{A \subseteq E / A$ dén ou A^c dén$\}$

soit $\{x\} \in \mathcal{R}$ on a : $\{x\} \in B \Rightarrow \mathcal{R} \subseteq B$

Montrons que B est la plus petite tribu qui contient $\mathcal{R}$.

soit B' une tribu tq $\mathcal{R} \subseteq B'$, est ce que $B \subset B'$??

soit $A \subset B$, • si A est dénombrable $\Rightarrow A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$

on a : $\{x\} \in \mathcal{R}$ et $\mathcal{R} \subseteq B'$

$\Rightarrow \{x\} \in B' \Rightarrow A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \in B'$ (réunion dénombrable)

• si A est non dénombrable

on a $A^c \in B \Rightarrow A^c \in B'$ (d'après le 1ère cas)

$\Rightarrow A \in B' \Rightarrow B \subset B'$

d'où $B(\mathcal{R}) = B$

Exercice 7 :

E un ensemble, $\mathcal{R} = \{A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots\}$

$\mathcal{R}$ une partition de E

• si $\mathcal{R} = \{A_0, A_1, \dots, A_n\} \subseteq P(E)$

on a $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$, $A_i \subseteq E$

$A_i \in \mathcal{R} \Rightarrow A_i^c = E \setminus A_i = \bigcup A_j$

• considérer $\mathcal{A} = \{(\bigcup A_k)_{k \in J}$ où $J \subset \{1, 2, \dots, n\}$ $i \neq j\}$

Mq $\mathcal{A}(\mathcal{R}) = \mathcal{A}$?

↳ montrons d'abord que $\mathcal{A}$ est une algèbre ?

$\mathcal{A} \neq \emptyset$ car $E = \bigcup_{i \in \{0, \dots, n\}} A_i \Rightarrow E \in \mathcal{A}$

$\emptyset = \bigcup_{i \in \emptyset \subset \{0, \dots, n\}} A_i \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{A}$

soit $A \in \mathcal{A}$, $A = \bigcup_{i \in J} A_i \Rightarrow A_E^c = \bigcup_{i \in \{0, \dots, n\} \setminus J \subseteq \{0, \dots, n\}} A_i$

$\Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

soient $A, B \in \mathcal{A}$:

$A = \bigcup_{i \in J_1} A_i$, $J_1 \subseteq \{0, \dots, n\}$

$B = \bigcup_{i \in J_2}$, $J_2 \subseteq \{0, \dots, n\}$

$A \cup B = \bigcup_{i \in J_1 \cup J_2} A_i$ et $J_1 \cup J_2 \subset \{0, \dots, n\}$

$\Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$, conclusion: $\mathcal{A}$ est une algèbre

$\Omega = \bigcup_{i \in \{0, \dots, n\}} A_i \Rightarrow \Omega \subset \mathcal{A}$?

soit $A_i \in \Omega$ on a: $A_i = \bigcup_{\substack{j \in \{i\} = J \\ J \subseteq \{0, \dots, n\}}} A_j$

$\Rightarrow A_i \in \mathcal{A}$ d'où $\Omega \subseteq \mathcal{A}$

Mq $\mathcal{A}$ est le plus petit algèbre qui contient Ω?

soit $\mathcal{A}'$ une algèbre qui contient Ω

Mq $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$?

soit $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A = \bigcup_{i \in J \subset \{0, \dots, n\}} A_i$

$\forall i \in J$, $A_i \in \Omega \subset \mathcal{A} \Rightarrow A \in \mathcal{A}'$ car $\mathcal{A}'$ est une algèbre, d'où $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$

conclusion : $\boxed{\mathcal{A}(\Omega) = \mathcal{A}}$

- si $\Omega = \{A_0, A_1, \dots, A_n, \dots\}$

considérer: $\mathcal{A} = \{(\bigcup A_k)_{k \in J} \ / \ J \text{ fini ou } J^c \text{ fini}, J \subset \mathbb{N}\}$

Mq $\mathcal{A}$ est une algèbre ?

Attention : $A = 2\mathbb{N}$ n'est pas fini
$A^c = \{2n+1 / n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas fini

$A \neq \emptyset$ car $\forall i \in \mathbb{N}$ on a : $A = \underset{k \in \{i\}}{A_k} \in \mathcal{A}$

de plus on a : $\Omega \subseteq \mathcal{A} \left(A_i \subset \Omega \Rightarrow A_i \in \mathcal{A}\right)$

soit $A \in \mathcal{A}$, est ce que $A^c \in \mathcal{A}$?
on a : $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A = \underset{i \in J}{\cup A_i}$ / J fini ou J^c fini, $J \subseteq \mathbb{N}$

$A_E^c = E \setminus A = \underset{i \in \mathbb{N} \setminus J = J^c}{(\cup A_i)} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

soient $A, B \in \mathcal{A}$, est ce que $A \cup B \in \mathcal{A}$?
on a : $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A = \underset{i \in J_1}{\cup A_i}$; J_1 fini ou J_1^c fini, $J_1 \subset \mathbb{N}$

$B \in \mathcal{A} \Rightarrow A = \underset{i \in J_2}{\cup A_i}$; J_2 fini ou J_2^c fini, $J_2 \subset \mathbb{N}$

on a : $A \cup B = \underset{i \in J_1 \cup J_2}{\cup A_i}$

* si J_1 et J_2 sont finis donc $J_1 \cup J_2$ est fini $\Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$
* si J_1 n'est pas fini ou J_2 n'est pas fini
on a $(J_1 \cup J_2)^c = J_1^c \cap J_2^c$ serais fini
on a $A \cup B \subset \mathcal{A}$
donc $\mathcal{A}$ est une algèbre qui contient Ω
soient $\mathcal{A}'$ une algèbre qui contient Ω
Mq $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$?
soit $A \subset \mathcal{A} \Rightarrow A = \underset{i \in J}{\cup A_i}$ / $J \in \mathbb{N}$, J fini ou J^c fini

- si J est fini, on a $A \subset \mathcal{A}'$ ($A_i \in \Omega \Rightarrow A_i \in \mathcal{A}'$
$\Rightarrow A \subset \mathcal{A}'$ (stable par réunion))
- si J^c est fini,
on a $A^c = \bigcup_{i \in J^c} A_i \quad (A_i \in \Omega \subset \mathcal{A}')$

$\Rightarrow A^c \in \mathcal{A}' \Rightarrow A \in \mathcal{A}'$ ($\mathcal{A}'$ stable par réunion)
alors $A \in \mathcal{A}'$
conclusion : $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\Omega)$

Application :

(i) $E = \mathbb{N}$ et $A_n = \{n\}$, $n \geq 0$
$\Rightarrow \Omega = \{\{0\}, \{1\}, \{e\}, \dots\}$

$$E = \bigcup_{i \geq 0} A_i = \bigcup_{i \geq 0} \{i\} = \mathbb{N}$$

$$\mathcal{A}(\Omega) = \left\{ \bigcup_{i \in J} A_i \ / \ J \text{ fini ou } J^c \text{ fini}, J \subset \mathbb{N} \right\}$$

on a : $\bigcup_{i \in J} A_i = \bigcup_{i \in J} \{i\} = J$

$$\Rightarrow \mathcal{A}(\Omega) = \{J \ / \ J \text{ fini ou } J^c \text{ fini}, J \subset \mathbb{N}\}$$

(ii) $E = \mathbb{N}$ et $A_1 = \{0, 1\}$ et $A_n = \{n\}$, $n \geq e$
$\Omega = \{\{0, 1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \dots\}$

$= \{B_0, B_1, B_2, \dots\}$, $B_0 = \{0, 1\}$, $B_i = \{i+1\}$

$$\mathcal{A}(\Omega) = \left\{ \bigcup_{i\in J} B_i \;/\; J \text{ finie ou } J^c \text{ finie}, J \subset \mathbb{N} \right\}$$

- si $0 \notin J$: $J \subseteq \mathbb{N}\setminus\{0\}$
  ou a : $\bigcup_{i\in J} B_i = \bigcup_{i\in J} \{i+1\} = J'$
  $J' = \{i+1 / i \in J\} \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$
- si $0 \in J$: $\bigcup B_i = B_0 \cup \bigcup_{i\in J\setminus\{0\}} B_i$

$J = \{0,1\} \cup (J')$, $J' \subseteq \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$

$\Rightarrow \mathcal{A}(\Omega) = \{ J \subseteq \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, J \text{ finie ou } J^c \text{ finie} \}$
$\cup \{ \{0,1\} \cup J, J \subseteq \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, J \text{ finie ou } J^c \text{ finie} \}$